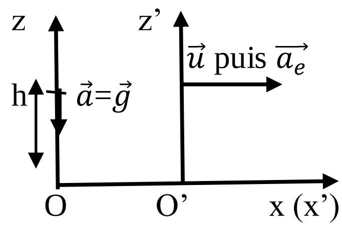
TD 1 : changement de référentiels

<u>Exercice 1 :</u> chute d'un corps dans un référentiel non galiléen

On laisse tomber d'un immeuble de hauteur h une bille sans vitesse initiale. La chute de celle-ci s'effectue à la verticale selon un mouvement uniformément accéléré d'accélération $\vec{g}$ supposé uniforme.

1. Quelle est la trajectoire de la bille dans un référentiel lié à une voiture se déplaçant suivant un mouvement rectiligne et uniforme de vitesse u et passant à la verticale de chute au moment du lâcher



2. Quelle est la trajectoire de la bille dans le même référentiel si on admet que la voiture entame au moment du lâcher et à partir de la verticale de chute un mouvement rectiligne uniformément accéléré d'accélération $\overrightarrow{a_e}$?
3. Représenter dans chaque cas la trajectoire demandée.

<u>Exercice 2 :</u> bateau traversant une rivière

Les berges d'un fleuve sont parallèles. Leur distance est ℓ. La vitesse de l'eau est constante et égale à $\vec{u}$. Un bateau part d'un point A d'une berge et veut atteindre le point B situé sur l'autre berge exactement en face de A. Pour cela, il part de A avec une vitesse relative constante $\overrightarrow{V_r}$ faisant un angle φ avec la berge. Il atteint B au bout d'une durée t.

1. Déterminer la vitesse relative V_r et l'angle φ.
   Application numérique : u = 2 m/s ; $\ell = 400\ m$; t = 25 min.

Le bateau part maintenant d'un point A d'une berge avec une vitesse relative constante $\overrightarrow{V_r}$ constante pour atteindre un point C quelconque de l'autre berge.

2. Déterminer l'orientation de $\overrightarrow{V_r}$ pour que la durée de la traversée soit minimale.
3. Quelle est cette durée minimale, quel est le chemin alors parcouru ?

Exercice 3

En roulant sous la pluie à $v_1 = 110$ km.h^{-1} sur une autoroute plane, un conducteur remarque que les gouttes de pluie ont, vues à travers les vitres latérales de sa voiture, des trajectoires qui font un angle de $\alpha = 80°$ avec la verticale. Ayant arrêté sa voiture, il remarque que la pluie tombe, en fait, verticalement. Calculer la vitesse v et respectivement v' de la pluie par rapport à la voiture immobile et par rapport à la voiture se déplaçant à $v_1 = 110$ km.h^{-1}.

Exercice 4

On associe à une horloge un repère fixe *OXY* qui sera considéré comme référentiel absolu. On associe à l'aiguille des secondes un repère *Oxy* qui sera considéré comme relatif. La longueur de l'aiguille des secondes est $L = 30$ cm. Un insecte parcourt d'un mouvement uniforme l'aiguille des secondes, qui a elle-même un mouvement uniforme non saccadé. Au départ, l'insecte est au centre O de l'horloge qui marque 0 seconde. Au bout d'une minute (T = 1mn), l'insecte arrive à l'extrémité de l'aiguille.

1. Déterminer en fonction de L, T et du temps t la vitesse et l'accélération relative de M ainsi que sa position sur l'aiguille.
2. Déterminer de même la vitesse et l'accélération d'entraînement.
3. Déterminer l'accélération de Coriolis.
4. Calculer le module de toutes ces grandeurs aux dates t = 0 s, t = 15 s, t = 30 s, t = 45 s et t = 1mn.
5. Représenter sur un schéma la trajectoire de M et le vecteur vitesse absolue pour ces 5 dates.
6. Même question pour le vecteur accélération absolue.

<u>**Exercice 5 :**</u> point matériel mobile sur un cerceau tournant

On considère un cercle de centre O placé dans un plan vertical. Ce cercle est animé d'un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe verticale Oz à la vitesse angulaire ω. Un point M du cercle est animé d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω'.

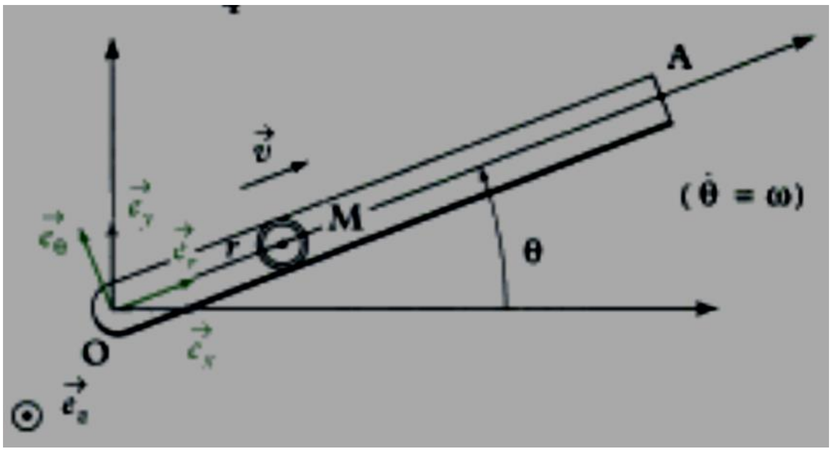
Déterminer en fonction de R (rayon du cercle), ω, ω' et de $\beta = \left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}\right)$ (M', projeté de M sur le plan horizontal), les modules :

1. de la vitesse absolue,
2. de l'accélération absolue de M par rapport à un repère fixe.

<u>Exercice 6</u>

On étudie le mécanisme de lancement des pigeons d'argile dans un ball-trap. Le pigeons d'argile assimilé à un point matériel M de masse m peut se déplacer sans frottement le long d'un bras horizontal (de longueur OA = ℓ) qui lui tourne à la vitesse ω (supposée constante) autour de l'axe (O ; $\vec{e}_z$) supposé vertical ascendant.

Au départ du mouvement, le pigeon d'argile est posé sans vitesse initiale par rapport au bras en OA(t = 0) = $\frac{\ell}{4}$.



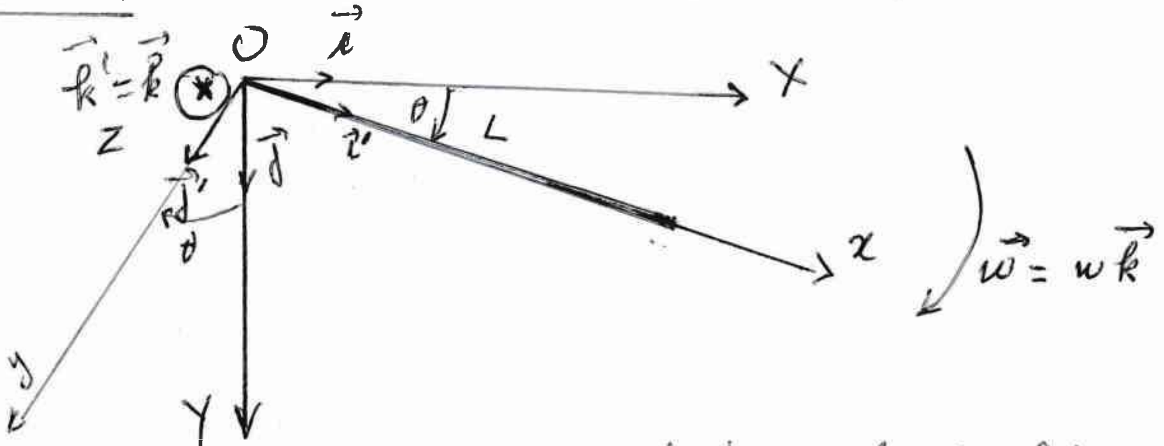
On suppose que le référentiel $\mathcal{R}_g(0; \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ est galiléen.

On repère la position de M par : $\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$.

1. Déterminer la variation de r en fonction du temps : *r(t)*.
2. Indiquer au bout de combien de temps, le pigeon d'argile quitte le bras.
3. Déterminer l'allure de la trajectoire de M dans $\mathcal{R}_g$.

Données numériques : ω = 6 rad.s^{-1} ; ℓ = 1 m.

Exercice 4



$\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ référentiel fixe (référentiel absolu)

$\mathcal{R}'(O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ référentiel mobile (référentiel relatif).

1) L'insecte a un mouvement de translation rectiligne uniforme sur l'aiguille $\vec{a}_r(M) = \left.\frac{d\vec{V}_r(M)}{dt}\right|_{\mathcal{R}'} = 0$

$\vec{v}_r = \vec{cte} = \frac{L}{T}\vec{i}'$ $\quad \vec{V}_r = 5\,10^{-3}\,\vec{i}'dt$ $\quad, V_r = 5\,10^{-3}$ m/s

$\vec{OM} = x'\vec{i}' = \int \vec{V}_r\,dt = \left(\frac{L}{T}t + cte\right)\vec{i}'$, à $t=0$ $\vec{OM}_0 = \vec{0}$

$\Rightarrow ct = 0$

$\vec{OM} = \frac{L}{T}t\,\vec{i}'$ $\qquad x' = \frac{L}{T}t$.

2) vitesse et accélération d'entrainement

vitesse d'entrainement : $\vec{V}_e = \left.\frac{d\vec{OO'}}{dt}\right|_{\mathcal{R}} + \vec{\omega}\wedge\vec{O'M}$ $\quad O' \equiv O$

$\vec{V}_e = \vec{\omega}\wedge\vec{OM} = \omega\vec{k}\wedge\frac{L}{T}t\,\vec{i}'$

$\vec{V}_e = \omega\frac{L}{T}t\,\vec{j}'$ $\qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$

$$\vec{V}_e = \frac{2\pi L t}{T^2}\,\vec{j}'$$

$$\boxed{\vec{V}_e = \frac{2\pi L t}{T^2}\,\vec{j}'}$$

$$\vec{a}_e = -\omega^2 \overrightarrow{OM} = -\omega^2 x' \vec{i}' = -\frac{4\pi^2}{T^2} \times \frac{L}{T} t\, \vec{i}'$$

$$\boxed{\vec{a}_e = -\frac{4\pi^2 L}{T^3}\, t\, \vec{i}'}$$

3- L'accélération de coriolis

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r = 2\omega \vec{k} \wedge \frac{L}{T}\vec{i}' = 2\,\frac{2\pi}{T} \times \frac{L}{T}\vec{j}'$$

$$\boxed{\vec{a}_c = \frac{4\pi L}{T^2}\,\vec{j}'}$$

4- Module des grandeurs

vecteurs	0s	15s	30s	45s	60s
$\Vert\vec{a}_r(M)\Vert$	$0\ m/s^2$	$0\ m/s^2$	$0\ m/s^2$	$0\ m/s^2$	$0\ m/s^2$
$\Vert\vec{V}_r\Vert$	$5\,10^{-3}\ m/s$	$5\,10^{-3}\ m/s$	$5.10^{-3}\ m/s$	$5\,10^{-3}\ m/s$	$5\,10^{-3}\ m/s$
$\Vert\overrightarrow{OM}\Vert$	0	$7,5.10^{-2}\ m$	$1,5\,10^{-1}\ m$	$2,25\,10^{-1}\ m$	$3\,10^{-1}\ m$
$\Vert\vec{a}_e\Vert\ (m/s^2)$	0	$8,22\,10^{-4}\ m/s^2$	$1,65\,10^{-3}\ m/s^2$	$2,47.10^{-3}\ m/s^2$	$3,29\,10^{-3}\ m/s^2$
$\Vert\vec{V}_e\Vert\ (m/s)$	0	$7,85\,10^{-3}$	$1,57\,10^{-2}$	$2,35\,10^{-2}$	$3,14\,10^{-2}$
$\Vert\vec{a}_c\Vert\ (m/s^2)$	$1,05.10^{-3}$	$1,05\,10^{-3}$	$1,05\,10^{-3}$	$1,05\,10^{-3}$	$1,05\,10^{-3}$

5. détermination de la vitesse absolue

$$\vec{V}(n)/_R = \vec{V}(n)/_{R'} + \vec{V}_e = \frac{L}{T}\vec{i}' + \frac{2\pi L}{T^2} t \vec{j}$$

$$\vec{V}(n)/_R = \sqrt{V(n)^2_{/R'} + V_e^2} \quad \text{car } \vec{V}(n)/_{R'} \perp \vec{V}_e$$

$t(s)$	0	15	30	45	60
$V(n)/_R \ (m.s^{-1})$	5.10^{-3}	$9,31.10^{-3}$	$1,65\,10^{-2}$	$2,40.10^{-2}$ $2,4.10^{-2}$	$3,17\,10^{-2}$

Représentation de la trajectoire

$$\theta = \omega t = \frac{2\pi}{T} t \ ; \ \theta(°) = \frac{360}{T} t$$

$t(s)$	0	15 s	30	45	60
$\theta(°)$	0	90	180	270	360
$x'(cm)$	0	7,5	15	22,5	30

Représentation voir fig 1.

6) Même trajectoire qu'à la question 5.

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_c = -\frac{4\pi^2 L}{T^3} t \vec{i}' + \frac{4\pi L}{T^2}\vec{j}'$$

$$\vec{a}_a = \frac{4\pi L}{T^2}\left(-\frac{\pi}{T} t \vec{i}' + \vec{j}'\right) \qquad a_a = \sqrt{a_c^2 + a_e^2}$$

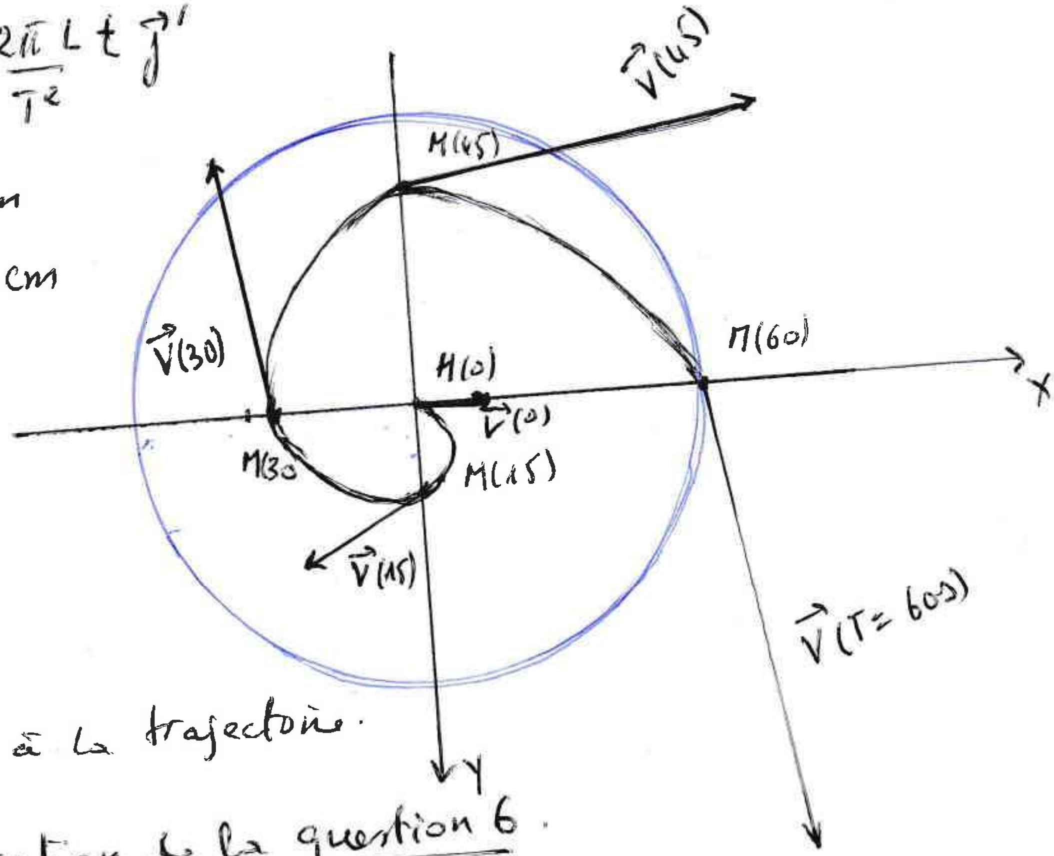
	$t(s)$	0	15	30	45	60
$\vec{a}_a(n)$	a_{ax} (SI)	0	$-8,22\,10^{-4}$	$-1,65\,10^{-3}$	$-2,47\,10^{-3}$	$-3,29\,10^{-3}$
	a_{ay} (SI)	$1,05\,10^{-3}$	$1,05\,10^{-3}$	$1,05\,10^{-3}$	$1,05\,10^{-3}$	$1,05\,10^{-3}$
$\Vert\vec{a}_a\Vert$	m/s^2	$1,05\,10^{-3}$	$1,055\,10^{-3}$	$1,96\,10^{-3}$	$2,68\,10^{-3}$	$3,45\,10^{-3}$

Représentation de la question 5

$$\vec{V} = \frac{L}{T}\vec{i}' + \frac{2\pi L t}{T^2}\vec{j}'$$

30 cm ⟷ 4 cm

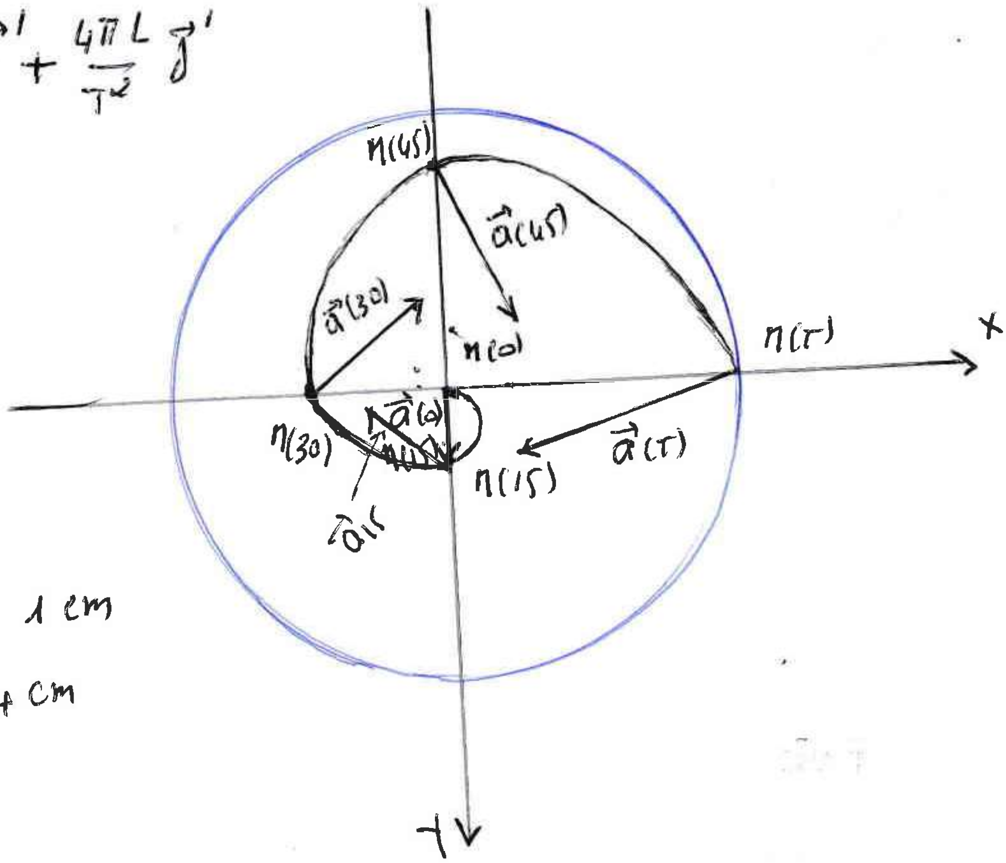
$5\,10^{-3}$ m/s ⟷ 1 cm



$\vec{V}$ tangent à la trajectoire.

Représentation de la question 6

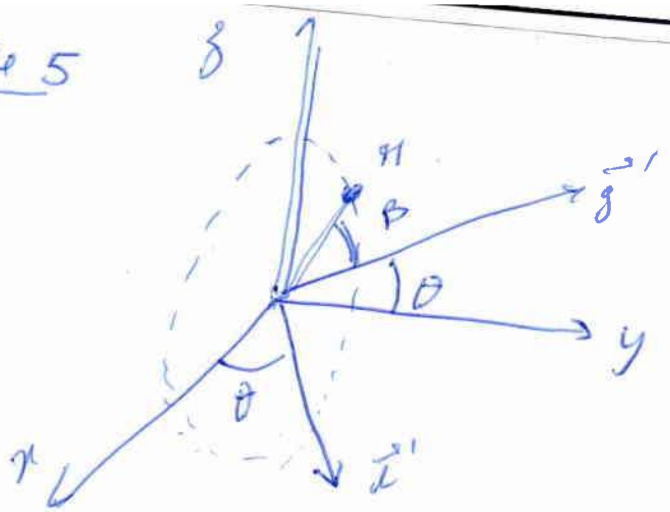
$$\vec{a} = -\frac{4\pi^2 t}{T^3}\vec{i}' + \frac{4\pi L}{T^2}\vec{j}'$$



$1{,}05\,10^{-3}$ m/s² ⟷ 1 cm

30 cm ⟷ 4 cm

Exercice 5



$$\vec{OM} = R\cos\beta\,\vec{j}' + R\sin\beta\,\vec{k}$$

$$\frac{d\vec{j}'}{dt} = \vec{\omega}\wedge\vec{j}' = \omega\vec{k}\wedge\vec{j}' = -\omega\,\vec{i}'$$

$$\vec{v}_a = R\frac{d}{dt}\left(\cos\beta\,\vec{j}'\right) + R\frac{d}{dt}\left(\sin\beta\,\vec{k}\right)$$

$$= -R\frac{d\beta}{dt}\sin\beta\,\vec{j}' + R\cos\beta\frac{d\vec{j}'}{dt} + R\frac{d\beta}{dt}\cos\beta\,\vec{k}$$

$$= -R\omega\cos\beta\,\vec{i}' - R\omega'\sin\beta\,\vec{j}' + R\omega'\cos\beta\,\vec{k}$$

$$v_a = \sqrt{R^2\omega^2\cos^2\beta + R^2\omega'^2\sin^2\beta + R^2\omega'^2\cos^2\beta}$$

$$v_a = R\sqrt{\omega'^2 + \omega^2\cos^2\beta}$$

$$\left.\frac{d\vec{j}'}{dt}\right|_{R'} = \vec{0} \qquad \left.\frac{d\vec{k}}{dt}\right|_{R'} = \vec{0}$$

ou

$$\vec{v}_r = \left.\frac{d\vec{OM}}{dt}\right|_{R'} = -R\omega'\sin\beta\,\vec{j}' + R\omega'\cos\beta\,\vec{k}$$

$$\vec{v}_e = \vec{\omega}\wedge\vec{OM} = \omega\vec{k}\wedge\left(R\cos\beta\,\vec{j}' + R\sin\beta\,\vec{k}\right) = -R\omega\cos\beta\,\vec{i}'$$

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = +R\omega\omega'\sin\beta\,\vec{i}' - R\omega^2\cos\beta\,\vec{j}' - R\omega'^2\cos\beta\,\vec{j}'$$

$$+ R\omega'\omega\sin\beta\,\vec{i}' - R\omega'^2\sin\beta\,\vec{k}$$

$$\vec{a}_a = 2R\omega\omega'\sin\beta\,\vec{i}' - R\left(\omega^2 + \omega'^2\right)\cos\beta\,\vec{j}'$$

$$- R\omega'^2\sin\beta\,\vec{k}$$

$$a_a = \sqrt{4R^2\omega^2\omega'^2\sin^2\beta + R^2(\omega^2+\omega'^2)^2\cos^2\beta + R^2\omega'^4\sin^2}$$

$$= R\sqrt{4\omega^2\omega'^2\cancel{\sin^2\beta} + \cancel{(\omega^4+\omega'^4+2\omega^2\omega'^2)}\cos^2\beta + \omega'^4\sin^2}$$

$$= R\sqrt{\cancel{\omega_0^2\sin^2\beta}(4\omega'^2 \cancel{+\omega^2})}$$

$$a_a = R\sqrt{(\omega^2+\omega'^2)^2\cos^2\beta + \omega'^2(4\omega^2+\omega'^2)\sin^2\beta}$$

cas particulier

* M est au point le plus haut ou au plus bas

$\beta = \frac{\pi}{2}$ rad ou $\beta = \frac{3\pi}{2}$ rad ($-\frac{\pi}{2}$ rad)

$v_a = R\omega'$

$a_a = R\omega'\sqrt{\omega'^2+4\omega^2} = R\omega'^2\sqrt{1+4\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2}$

* si M est dans le plan horizontal $\theta = 0$ ou $\pi = \pi$

$v_a = R\sqrt{\omega'^2+\omega^2}$

$a_a = R(\omega^2+\omega'^2)$

* Si $(\omega'^2+\omega^2)^2 = \omega'^2(\omega'^2+4\omega^2)$

$\Rightarrow a_a = R(\omega^2+\omega'^2)$

$\cancel{\omega'^4} + \omega^4 + 2\omega^2\omega'^2 = \cancel{\omega'^4} + 4\omega^2\omega'^2$

$\omega^4 = 2\omega^2\omega'^2 \Rightarrow \omega = \omega'\sqrt{2}$

$a_a = 3R\omega'^2$

$V_a = R\sqrt{\omega'^2 + 2\omega'^2\cos^2\beta}$

$V_a = R\omega\sqrt{1+2\cos^2\beta}$

Correction du devoir N°1 Mecanique – Exercice 2)

1) Pour trouver la fonction $r(t)$, on va appliquer (par exemple) le TPC en référentiel non galiléen (en effet il y a un mouvement relatif).

– **Système étudié** : le pigeon d'argile M de masse m.

– **Référentiel d'étude** : $\Re(O\,;\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$ **lié au bras du lanceur (non galiléen).**

– **Forces appliquées au système** :

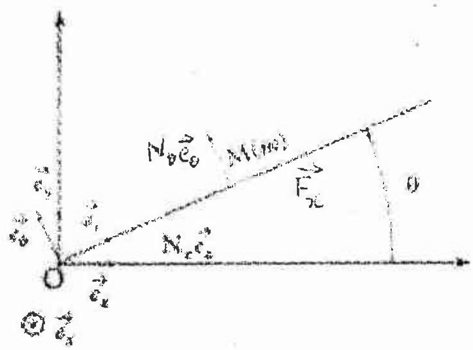
– poids $\vec{P} = -mg\vec{e_z}$;

– réaction du bras $\vec{R} = N_\theta\vec{e_\theta} + N_z\vec{e_z}$ (perpendiculaire au support car pas de frottement) ;

– forces d'inertie :

• $\vec{F_{ie}} = -m\vec{a_e}$ (d'entraînement) $= -m(-\omega^2 r\vec{e_r}) = m\omega^2 r\vec{e_r}$

• $\vec{F_{ic}}$ qu'on ne cherche pas à calculer puisque $\mathcal{P}(\vec{F_{ic}})\big|_{\Re} = 0$ (de Coriolis) ;



$\vec{v_r} = \dot{r}\vec{e_r}$

$\vec{a_r} = \ddot{r}\vec{e_r}$

$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$

pas de frottement $\vec{R} \perp \vec{e_r}$

$\vec{R} = R_\theta\vec{e_\theta} + R_z\vec{e_z}$

$\vec{f_{ie}} = m\omega^2\vec{OM} = m\omega^2 r\vec{e_r}$

$\vec{F_{ic}} = -2m\vec{\omega}\wedge\vec{v_r}$

$= -2m\omega\vec{e_z}\wedge\dot{r}\vec{e_r}$

$\vec{F_{ic}} = -2m\omega\dot{r}\vec{u_\theta}$

RFD

$m\vec{a_r} = \vec{P}+\vec{R}+\vec{f_{ie}}+$

Projection sur $\vec{e_r}$.

$m\ddot{r} = m\omega^2 r$

– **Puissances des forces appliquées** :

• $\mathcal{P}(\vec{P})\big|_{\Re} = 0$ car $\vec{v}(M)_{|\Re} = \dot{r}\vec{e_r} \perp \vec{e_z}$

• $\mathcal{P}(\vec{R})\big|_{\Re} = 0$ car $\vec{v}(M)_{|\Re} = \dot{r}\vec{e_r} \perp \vec{e_\theta} \perp \vec{e_z}$ (pas de frottement)

• $\mathcal{P}(\vec{F_{ie}})\big|_{\Re} = m\omega^2 r\vec{e_r}\cdot\dot{r}\vec{e_r} = m\omega^2 r\dot{r}$

• $\mathcal{P}(\vec{F_{ic}})\big|_{\Re} = 0$;

Le TPC s'écrit donc :

$$\frac{d}{dt}(\mathcal{E}_c(M)_{|\Re}) = \mathcal{P}(\vec{P})\big|_{\Re} + \mathcal{P}(\vec{R})\big|_{\Re} + \mathcal{P}(\vec{F_{ie}})\big|_{\Re} + \mathcal{P}(\vec{F_{ic}})\big|_{\Re}$$

Or $\mathcal{E}_c(M)_{|\Re} = \frac{1}{2}mv^2(M)_{|\Re} = \frac{1}{2}m(\dot{r}\vec{e_r})^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2$

donc on a :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\dot{r}^2\right) = 0 + 0 + m\omega^2 r\dot{r} + 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}m2\dot{r}\ddot{r} = m\omega^2 r\dot{r}.$$

Soit : $$\ddot{r} - \omega^2 r = 0.$$

Cette équation différentielle admet comme solution :

$$r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t},$$

$\dot{r}(t) = A\omega e^{\omega t} - B\omega e^{-\omega t}$ $\boxed{\ddot{r} - \omega^2 r = 0}$

$$\text{à } t = 0 : \begin{cases} r(t=0) = \frac{\ell}{4} = A + B \\ \dot{r}(t=0) = 0 = A\omega - B\omega \end{cases}$$

soit $A = \frac{\ell}{8}$ et $B = \frac{\ell}{8}$

Ainsi : $r(t) = \frac{\ell}{8}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})$. Soit $r(t) = \frac{\ell}{4}\text{ch}\,\omega t$

2) Le pigeon d'argile quitte le bas quand $r(t = T) = \ell$

1 c'est-à-dire $\frac{\ell}{8}(e^{\omega T} + e^{-\omega T}) = \ell$

soit $e^{\omega T} + e^{-\omega T} = 8$

en posant $X = e^{\omega T}$ on obtient :

$$X + \frac{1}{X} = 8$$

soit $X^2 - 8X + 1 = 0$

$$\Delta = 8^2 - 4 \times 1 \times 1 = 60$$

$$X_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{60}}{2} = 4 \pm \frac{\sqrt{60}}{2}$$

comme $X = e^{\omega T}$, on ne conserve que la solution positive, ainsi :

2

$$X_1 = 4 + \sqrt{15} = e^{\omega T}$$

$$T = \frac{\ln(4 + \sqrt{15})}{\omega}$$

1 A.N. $T = \frac{\ln(4 + \sqrt{15})}{6} = 0{,}34$ s.

3) Pour déterminer la trajectoire de M dans $\mathcal{R}_g$, on va exprimer le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans $\mathcal{R}_g$:

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$

$\overrightarrow{OM} = r(\cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y)$

1 $\overrightarrow{OM} = r(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y)$.

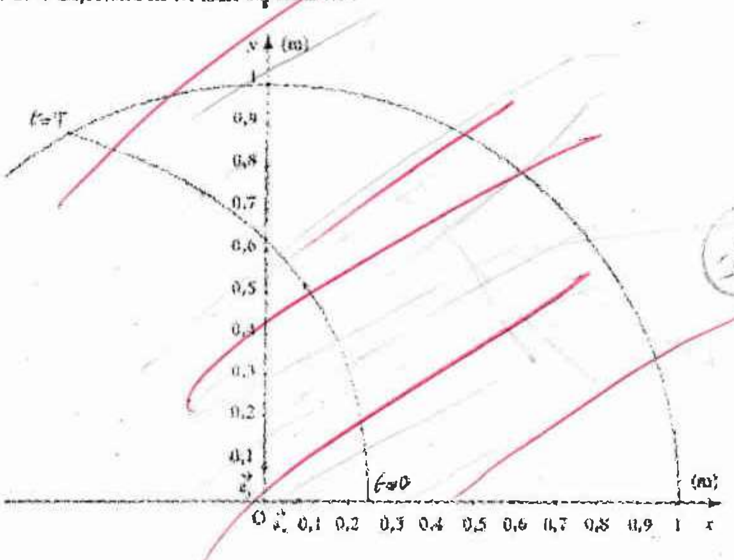
Si on pose $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$, on a :

1
$$\begin{cases} x(t) = r\cos\omega t \\ y(t) = r\sin\omega t \end{cases}$$

soit en remplaçant r par son expression (trouvée dans la question 1) :

2
$$\begin{cases} x(t) = \frac{\ell}{8}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})\cos\omega t \\ y(t) = \frac{\ell}{8}(e^{\omega t} + e^{-\omega t})\sin\omega t \end{cases} \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T.$$

L'allure de la trajectoire de M dans $\mathcal{R}_g$ est donc :



1

6/14

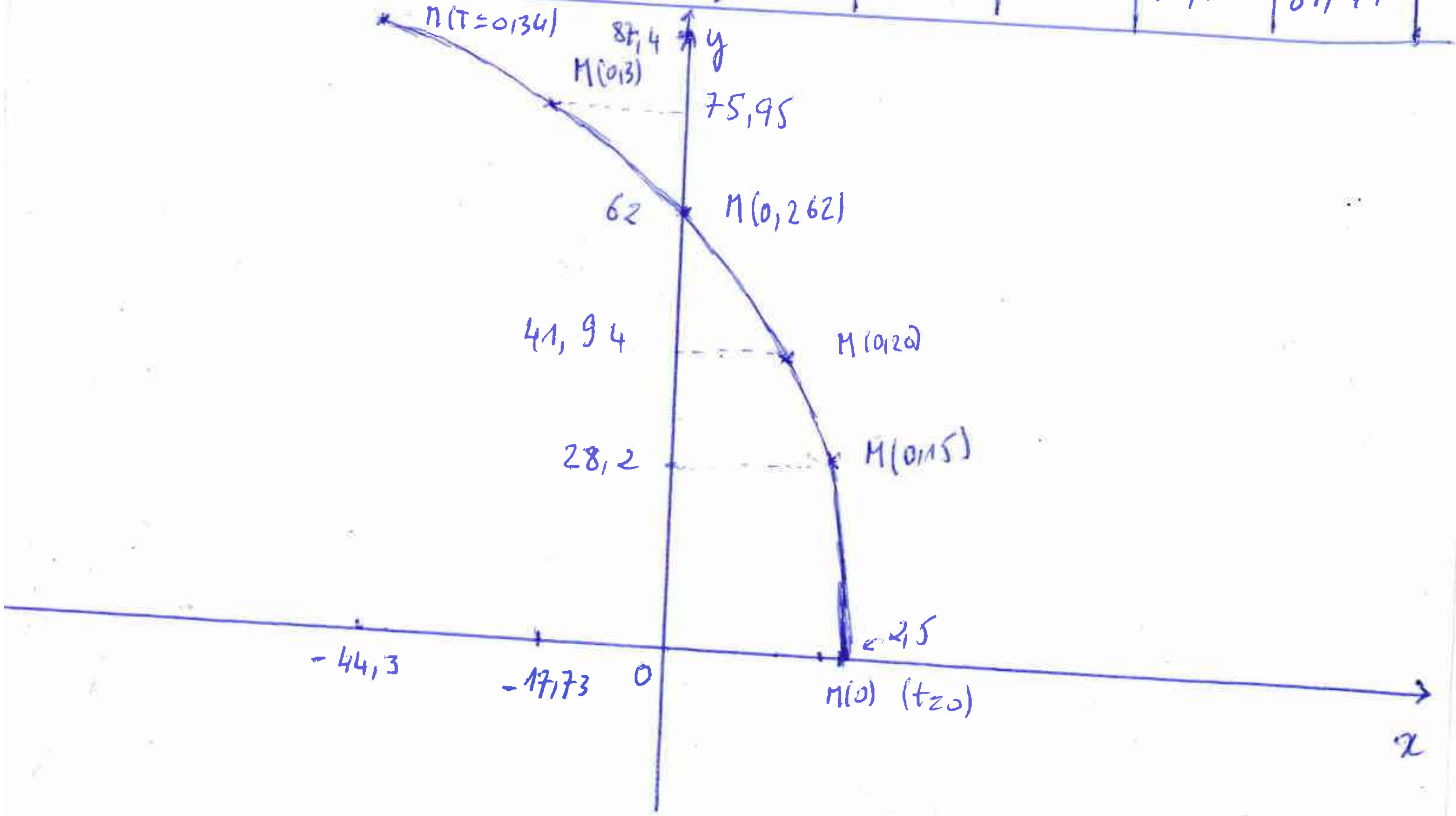
Tracé de l'allure de la trajectoire pour $0 \leq t \leq T = 0,34\,s$

* $x = 0 \Rightarrow \cos\omega t = 0 \Rightarrow \omega t = \frac{\pi}{2}$ ou $\omega t = \frac{3\pi}{2}$

$t = \frac{\pi}{2\omega} = \frac{\pi}{12} = 0,262\,s$ ou $t = \frac{3\pi}{2\omega} = \frac{3\pi}{12} = 0,785\,s > T$

* $y = 0 \Rightarrow \sin\omega t = 0 \Rightarrow t = 0$ ou $t = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{6} = 0,52\,s > T$

t(s)		0	0,05	0,1	0,15	0,20	0,262	0,3	0,34=T
$\theta = \omega t$ (rad)		0	0,3	0,6	0,9	1,2	1,56	1,8	2,04
θ (°)		0	17,19	34,38	51,57	68,76	90	103,14	116,88
r (cm)		12,5	26	30	36	45	62	78	98
M	x(cm)	12,5 (25)	24,84	24,75	22,38	16,3	0	-17,73	-44,3
	y(cm)	0	7,68	16,94	28,2	41,94	62	75,95	87,41



Echelle $\frac{1}{10}$